ΛΥΣΕΙΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2001

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

α)

Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 105

β)

Α. 4 , Β.7 , Γ. 1 , Δ . 2 , Ε. 5 , ΣΤ. 6

Β.

$z_1 = 1 + i$, $z_2 = i$

α)

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + i\eta\mu\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{και} \quad z_2 = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\,\eta\mu\frac{\pi}{2}$$

β)

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + i\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} + i\eta\mu\frac{3\pi}{4}\right)$$

ΘΕΜΑ 2ο

α)

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$

Άρα τα σημεία τομής με τον άξονα των x είναι τα $A(1, 0)$ και $B(3, 0)$

Είναι $f(0) = 3$, οπότε το σημείο τομής με τον άξονα των y είναι το $\Gamma(0, 3)$

β)

$f'(x) = 2x - 4$ με $f'(3) = 2$ και $f(3) = 0$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Leftrightarrow$

$$y = 2(x-3) \Leftrightarrow$$

$$y = 2x - 6$$

γ)

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

Και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$

ΘΕΜΑ 3ο

α)

Η υπόθεση $2 - x^4 \le f(x) \le 2 + x^4$ για $x = 0$ δίνει $2 \le f(0) \le 2$, άρα $f(0) = 2$

β)

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(2 - x^4) = 2 = \lim\limits_{x\to 0}(2 + x^4)$, σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$

Αφού λοιπόν $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2 = f(0)$, η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$

γ)

$$2 - x^4 \le f(x) \le 2 + x^4 \Leftrightarrow -x^4 \le f(x) - 2 \le x^4 \Leftrightarrow$$
$$-x^4 \le f(x) - f(0) \le x^4 \quad \textbf{(1)}$$

- Όταν $x > 0$, η (1) $\Rightarrow -x^3 \le \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \le x^3$

  και αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x^3) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^3)$,

  σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

- Όταν $x < 0$, ομοίως θα είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, είναι $f'(0) = 0$

ΘΕΜΑ 4ο

α)

Ο χρόνος που χρειάζεται για να διανυθούν 625 km με ταχύτητα x km/h είναι

$t = \dfrac{625}{x}$ ώρες, οπότε τα καύσιμα που απαιτούνται για το ταξίδι είναι

$\dfrac{625}{x}\left(5{,}5 + \dfrac{x^2}{200}\right)$ λίτρα και το κόστος αυτών θα είναι $160 \cdot \dfrac{625}{x}\left(5{,}5 + \dfrac{x^2}{200}\right)$

Η αμοιβή του οδηγού θα είναι $2000 \cdot \dfrac{625}{x}$

Επομένως το συνολικό κόστος του ταξιδιού είναι

$$K(x) = 160 \cdot \frac{625}{x}\left(5{,}5 + \frac{x^2}{200}\right) + 2000 \cdot \frac{625}{x} =$$
$$= \frac{550000}{x} + 500x + \frac{1250000}{x} =$$
$$= \frac{1800000}{x} + 500x \quad , \quad 0 < x < 90$$

β)

$K'(x) = -\dfrac{1800000}{x^2} + 500 = \dfrac{500x^2 - 1800000}{x^2}$

$K'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 60$ (αφού $x > 0$)

$K'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 60$ και

$K'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 60$

επομένως η $K(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 60$, πράγμα που σημαίνει ότι το κόστος ελαχιστοποιείται όταν η ταχύτητα είναι 60 km/h.